**2 RS 46115**

# THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2024

## FOURTH SEMESTER

## Mathematics

## Paper V – LINEAR ALGEBRA

(w.e.f. 2020-21 Admitted Batch)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

---

### SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. If $S,T$ are the subsets of a vector space $V(F)$, then prove that $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$.

   $V(F)$ సదిశాంతరాళంలో $S,T$ ఉపసమితులు అయితే $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$ అని చూపండి.

2. Show that the system of vectors $(1,3,2)(1-7,-8)(2,1,-1)(1,0,1)$ of $V_3(R)$ is linearly dependent.

   $V_3(R)$ సదిశాంతరాళంలో $(1,3,2)(1-7,-8)(2,1,-1)(1,0,1)$ సదిశలు ఋజుపరాధీనములు అని చూపండి.

3. Show that the set $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ is a basis of $C^3(C)$ . Hence find the coordinates of the vector $(3+4i,6i,3+7i)$ in $C^3(C)$.

   $C^3(C)$ నకు $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ ఆధారసమితి అని చూపండి. $(3+4i,6i,3+7i)$ సదిశలు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

4. Show that the vectors $(1,2,1)(2,1,0)(1,-1,2)$ form a basis for $R^3$.

   $(1,2,1)(2,1,0)(1,-1,2)$ అను సదిశలు $R^3$ యొక్క ఆధారాన్ని ఏర్పరుస్తుంది అని చూపుము.

5. The mapping $T: V_3(R) \to V_3(R)$ is defined by $T(x, y, z) = (x-y, 0, y+z)$. Show that T is a linear transformation.

   $T(x, y, z) = (x-y, 0, y+z)$ అగునట్లు $T: V_3(R) \to V_3(R)$ ను నిర్వచించిన , T ఒక ఋజుపరివర్తన అని చూపుము.

6. Let $T:R^3 \to R^2$ and $H:R^3 \to R^2$ are two linear transformation defined by $T(x,y,z)=(3x,y+z)$ and $H(x,y,z)=(2x-z,y)$.

Compute the following.

(a) $T+H$

(b) $4T-5H$

(c) $TH$

(d) $HT$

$T:R^3 \to R^2$ మరియు $H:R^3 \to R^2$ లు రెండు సరళపరివర్తనలు $T(x,y,z)=(3x,y+z)$ మరియు $H(x,y,z)=(2x-z,y)$ గా నిర్వచిస్తే ,

(a) $T+H$

(b) $4T-5H$

(c) $TH$

(d) $HT$ లను కనుక్కోండి.

7. Find the rank of the matrix $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ యొక్క కోటిని కనుగొనండి.

8. Reduce the matrix $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ into echelon form and find its rank.

$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క echelon రూపం మరియు దాని ర్యాంక్ కనుగొనండి.

9. Show that the system of equations $2x+3y=1$, $x+y=0$, $6x+5y=1$ are inconsistent.

$2x+3y=1$, $x+y=0$, $6x+5y=1$ సమీకరణాలు పొందిన నియమము పాటించడని చూపండి.

10. Find the Eigen values of the matrix $A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక మూలాలను కనుగొనుము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. Prove that Union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other.

రెండు ఉపాంతరాళాల సమ్మేళనం కూడా ఉపాంతరాళం కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం ఒకటి రెండవదాని ఉపసమితి అయి ఉండాలి అని నిరూపించండి.

Or

12. If $S$ and $T$ are two subsets of a vector space $V(F)$ then show that $L(SUT)=L(S)+L(T)$.

$V(F)$ సదిశాంతరాళంలో $S$, $T$ ఉపసమితులు అయితే $L(SUT)=L(S)+L(T)$ అని చూపండి.

13. $V$ is the vector space of a polynomial over $R$. $W_1$ and $W_2$ are the subspaces generated by $\{x^3+x^2-1, x^3+2x^2+3x, 2x^3+3x^2+3x-1\}$ and

$\{x^3+2x^2+2x-2, 2x^3+3x^2+2x-3, x^3+3x^2+4x-3\}$ respectively then find

(a) $\dim(W_1+W_2)$

(b) $\dim(W_1\cap W_2)$

$V$, $R$ పై బహుపదుల సదిశాంతరాళం, $W_1$ మరియు $W_2$ లు వరుసగా $\{x^3+x^2-1, x^3+2x^2+3x, 2x^3+3x^2+3x-1\}$ మరియు

$\{x^3+2x^2+2x-2, 2x^3+3x^2+2x-3, x^3+3x^2+4x-3\}$ లచే జనితమైన ఉపాంతరాళం అయితే

(a) $\dim(W_1+W_2)$

(b) $\dim(W_1\cap W_2)$

Or

14. If $V(F)$ is a finite dimensional vector space, then any two bases of $V$ have the same number of elements.

$V(F)$ అనేది పరిమిత పరిమాన సదిశాంతరాళం అయితే, $V$ యొక్క ఏవైనా రెండు స్థావరాలు ఒకే మూలకాల యొక్క సంఖ్యను కలిగి ఉంటాయి.

15. State and prove Rank-Nullity theorem.

కోటి- శూన్యత సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

16. Find the nullspace, range, rank and nullity of the transformation $T: R^2 \to R^3$ defined by $T(x,y)=(x+y,x-y,y)$.

$T: R^2 \to R^3$ సదిశాంతరాళంను $T(x,y)=(x+y,x-y,y)$ గా నిర్వచిస్తే కోటి, శూన్యత , వ్యాప్తి శూన్యాంతరాలంను కనుక్కోండి.

17. Find the rank of the following matrix by reducing it to normal form $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క ర్యాంక్‌ని సాధారణ రూపానికి తగ్గించడం ద్వారా కనుగొనండి.

Or

18. Find the inverse of the matrix $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ by using elementary transformations.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ప్రాథమిక పరివర్తనలను ఉపయోగించి మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

19. Solve that the system of equations $x+2y-z=3, 3x-y+2z=1, 2x-2y+3z=2,\ x-y+z=-1$ is consistent and solve them.

$x+2y-z=3, 3x-y+2z=1, 2x-2y+3z=2,\ x-y+z=-1$ ఉంటే పరిష్కారాన్ని కనుక్కోండి.

Or

20. Find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ by using Cayley-Hamilton theorem.

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ కేలీ హామిల్టన్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి విలోమాన్ని కనుక్కోండి.